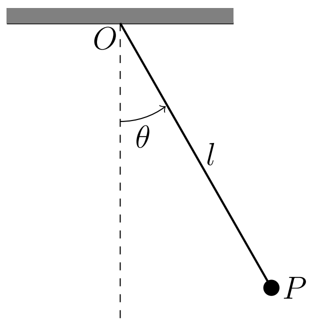
Série 11

Exercice S11E1*(*) (15 min) : Théorème du moment cinétique mécanique

On lance une bille de masse m à l'intérieur d'un cône (pointant vers le bas) avec un vecteur vitesse dans un plan horizontal. La bille tourne et descend le long de la surface intérieure sous l'effet de la gravitation. Le cône présente un demi-angle au sommet θ. La bille est considérée comme une masse ponctuelle. Montrez que la composante L_z du moment cinétique, avec l'axe O_z le long de l'axe du cône, est constante.

Exercice S11E2**(*)(20 min) : Pendule et moment cinétique

Un pendule (P) est constitué d'une masse m accrochée à un fil de longueur l, et de masse négligeable. La position du fil est repérée par rapport à la verticale par l'angle θ. Il n'y a pas de frottements.



a) Établissez l'équation différentielle de mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. Retrouvez cette équation en partant de la conservation de l'énergie mécanique.

b) En considérant des oscillations d'amplitude θ_0, quelle sera la tension maximum du fil ?

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

Coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{e_z}$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{e_z}$$

Coordonnées sphériques :

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\mathbf{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\mathbf{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\mathbf{e}_\varphi$$

Exercice S11E3* (10 min) : Vitesse de libération

Quelle vitesse doit avoir un objet de masse m, lancé à la verticale, pour se libérer du champ terrestre ? On négligera les frottements.
Indication: Rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^6$ m

Exercice S11E4** (45 min) : Etude d'un satellite

Soit un satellite de masse m sur une orbite circulaire à l'altitude h_0 autour de la Terre dont la masse est M_T et le rayon R_T. La constante de gravitation est notée G.

a) Calculez la vitesse v_0 du satellite en fonction des données de l'exercice (la démonstration est exigée).

b) Montrez que l'énergie mécanique E_m du satellite est égale à $-E_C$ dans le cas d'une orbite circulaire.

c) Au cours de sa trajectoire, le satellite est percuté par l'arrière par un déchet de l'espace de masse m_p et de vitesse $\overrightarrow{v_p}$ colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$. Le déchet reste «collé » au satellite. Le satellite n'est pas endommagé et poursuit sa course. Quelle est la vitesse v' du satellite juste après le choc ?

Après cet évènement, le satellite passe sur trajectoire elliptique, avec h_a et h_p respectivement les altitudes à l'apogée (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre) et au périgée (point de la trajectoire le plus proche).

d) Tracez les courbes de l'énergie potentielle effective pour la trajectoire circulaire initiale avant le choc, et pour la trajectoire après le choc. Indiquez sur la figure les rayons r_0, r_a et r_p, correspondant respectivement aux altitudes h_0, h_a et h_p.

e) Faire un schéma des deux trajectoires.

f) Exprimez le moment cinétique L du satellite en fonction de r_a, r_p, G, m, m_p, et M_T.

* * * * * * *

Exercices supplémentaires

Exercice S11ES1* (20 min) : Tout sur le moment cinétique (révision cours)

On s'intéresse au mouvement d'une particule de masse m dans le repère (Oxy). On considérera que le mouvement de m a lieu uniquement dans le plan xy

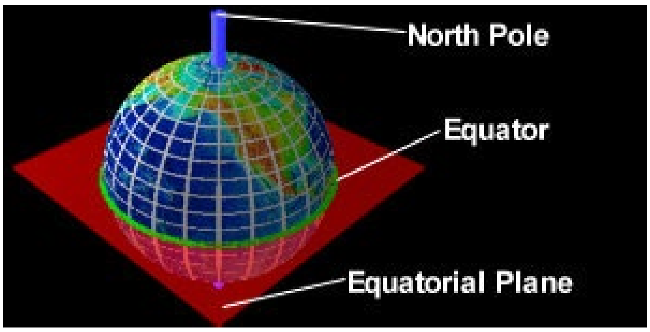
a) Rappelez la définition du moment cinétique et l'exprimer pour la particule par rapport à O, en coordonnées cylindriques.

b) Calculez la dérivée de ce moment cinétique. En déduire la relation entre la dérivée et le moment par rapport à O des forces s'appliquant sur la particule m. Que peut-on dire de cette dérivée quand la particule est soumise à une force centrale (dirigée vers O) ?

c) Exprimez en coordonnées cylindriques l'aire infinitésimale dA balayée par $\vec{r}$ pendant le temps infinitésimal dt. En déduire que la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ est constante dans le cas d'un mouvement à force centrale.

Exercice S11ES2** (40 min) : Swiss cube (Extrait Examen)

Le satellite Swisscube de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial. La masse de la Terre est notée M_T.



a) Déterminez les énergies potentielles E_p, cinétique E_c, et totale E_{tot} du satellite.

Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ (on rappelle que la latitude d'un point de la surface terrestre est l'angle formé entre le plan équatorial et la droite reliant ce point au centre de la Terre). Sa vitesse V_e est due à la rotation de la Terre, supposée sphérique et de rayon R_T.

b) En vous appuyant sur un schéma, donnez l'expression de V_e en fonction de ω_T (pulsation de rotation de la Terre), R_T et λ. Déterminez les énergies potentielle $E_{p,1}$, cinétique $E_{c,1}$, et totale $E_{tot,1}$ du satellite au point P.

On peut lancer le satellite de manière à ce qu'il tourne dans le même sens que la Terre ou dans le sens opposé.

c) On considère ici que le satellite tourne dans le même sens que la Terre. Pour placer le satellite sur son orbite, il faut alors lui fournir l'énergie suivante : $\Delta E = E_{tot} - E_{tot,1}$. Montrez que ΔE varie avec λ. Où doit-on choisir les bases de lancement (i.e. quelle latitude)? Quel sens de rotation par rapport à celui de la Terre doit-on donner aux satellites pour que l'énergie fournie ΔE soit minimale ?